数理解析研究所講究録
980巻 1997年 150-161

フィードバックをもつ離散時間ガウス型通信路について

山口大・工　柳　研二郎 (Kenjiro Yanagi)

1 INTRODUCTION

次のようなフィードバックをもつ離散時間ガウス型通信路を考える。

$$Y_n = S_n + Z_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ただし $Z = \{Z_n; n = 1, 2, \ldots\}$ は雑音を表す退化していない平均0のガウス過程、$S = \{S_n; n = 1, 2, \ldots\}$ と $Y = \{Y_n; n = 1, 2, \ldots\}$ はそれぞれ入力信号と出力信号を表す確率過程である。通信路は雑音のかからないフィードバックをもつとする。したがって S_n は送信するメッセージと出力信号 $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$ の函数であるとして表される。 レート R, 長さ n の符号語 $x^n(W, Y^{n-1})$, $W \in \{1, \ldots, 2^{nR}\}$ と復号函数 $g_n : \mathbb{R}^n \to \{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$ に対して、誤り確率は

$$Pe^{(n)} = Pr\{g_n(Y^n) \neq W; Y^n = x^n(W, Y^{n-1}) + Z^n\},$$

で定義される。ただし W は $\{1, 2, \ldots, 2^{nR}\}$ 上の一様分布で雑音 $Z^n = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ とは独立である。 入力信号には平均電力制限が課せられる。つまり

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[S_i^2] \leq P$$

である。またフィードバックは causal である。つまり $S_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ は $Z_1, \ldots, Z_{i-1}$ に従属している。同様にフィードバックがない場合は $S_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ は $Z^n = (Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ と独立である。

有限ブロック長容量を次のように定義する。

$$C_{n,FB}(P) = \max \frac{1}{2n} \log \frac{|(I+B)R_Z^{(n)}(I+B)^t + R_V^{(n)}|}{|R_Z^{(n)}|},$$

ただし最大値は

$$Tr[BR_Z^{(n)}B^t + R_V^{(n)}] \leq nP \tag{1}$$

を満たす狭義下三角行列 B と 非負対称行列 $R_V^{(n)}$ についてとる。同様にフィードバックがないときには容量 $C_n(P)$ は $B = 0$ としたときの最大値である。これらの条件の下で Cover and Pombra は次の結果を得た。

Theorem 1 (Cover and Pombra [1]) 任意の $\epsilon > 0$ に対して各 $n = 1, 2, \ldots$ でブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB}(P)-\epsilon)}$ 個の符号語が存在して $n \to \infty$ のとき $Pe^{(n)} \to 0$ とできる。逆に任意の $\epsilon > 0$ とブロック長 n で $2^{n(C_{n,FB}(P)+\epsilon)}$ 個の符号語からなる任意の符号の列に対しても $Pe^{(n)} \to 0\ (n \to \infty)$ が成り立たない。これはフィードバックをもたない場合も成り立つ。

ここではブロック長 n を固定したとき $C_{n,FB}(P)$ と $C_n(P)$ との間の関係に興味がある。$C_n(P)$ は正確に求められている。

Proposition 1 (Gallager [4])

$$C_n(P) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{k} \log \frac{nP + r_1 + \cdots + r_k}{k r_i},$$

ただし $0 < r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_n$ は $R_Z^{(n)}$ の固有値、$k(\le n)$ は $nP + r_1 + \cdots + r_k > k r_k$ を満たす最大整数である。

ところで $C_{n,FB}(P)$ は正確には得られないので、今まで多くの人々によって様々な形の上界が得られている。例えば Ebert [3], Pinsker [8], Cover and Pombra [1], Dembo [2], Yanagi [10] [11] などがある。この論文では今まで得られている上界よりある意味で強い上界を求める。

2　ある実2次形式の最小値

次のような実2次形式を考える。

$$Tr[Q^t R^{-1} Q - 2WQ] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \sum_{j=k}^{n} r_{ij} q_{ik} q_{jk} - 2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} w_{ki} q_{ik}, \tag{2}$$

ただし R は正定値対称行列で、$R^{-1} = \{r_{ij}; 1 \le i, j \le n\}$　はその逆行列、$Q = \{q_{ij}; 1 \le i, j \le n, q_{ij} = 0 (i < j)\}$ は下三角行列、$W = \{w_{ij}; 1 \le i, j \le n\}$ は直交行列である。ここでまず W は固定しておいて任意の下三角行列 Q の下での (2) の最小値を求めたい。その前に記号を導入する。$R^{-1}(k, \ldots, n)$ を $k, \ldots, n$ 行 $k, \ldots, n$ 列からなる R^{-1} の部分行列、$|R^{-1}(k, \ldots, n)|$ を $R^{-1}(k, \ldots, n)$ の行列式とする。また $R_{11}(k)$ を $1, \ldots, k-1$ 行 $1, \ldots, k-1$ 列からなる R の部分行列、$R_{12}(k)$ を $1, \ldots, k-1$ 行 $k, \ldots, n$ 列からなる R の部分行列、$R_{21}(k) = R_{12}(k)^t$ とする。このとき次を得る。

Theorem 2　*(2)* の最小値は次で与えられる。

$$-\sum_{k=1}^{n} \langle [R^{-1}(k, \ldots, n)]^{-1} \begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn} \end{pmatrix} \rangle, \tag{3}$$

ただし $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ の内積である。

Proof. $k \le \ell \le n$ とする。(2) の右辺を変形すると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=k}^{n} r_{ij} q_{ik} q_{jk} - 2\sum_{i=k}^{n} w_{ki} q_{ik} \\
=\ & \sum_{i\neq\ell}\sum_{j\neq\ell} r_{ij} q_{ik} q_{jk} + 2\sum_{i\neq\ell} r_{i\ell} q_{ik} q_{\ell k} + r_{\ell\ell} q_{\ell k}^2 - 2\sum_{i\neq\ell} w_{ki} q_{ik} - 2 w_{k\ell} q_{\ell k}.
\end{aligned} \tag{4}
$$

(4) を $q_{\ell k}$ で偏微分して次を得る。

$$\sum_{i=k}^{n} r_{i\ell} q_{ik} = w_{k\ell}.$$

したがって

$$
\begin{pmatrix} r_{kk} & r_{kk+1} & \cdots & r_{kn} \\ r_{k+1k} & r_{k+1k+1} & \cdots & r_{k+1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{nk} & r_{nk+1} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} q_{kk} \\ q_{k+1k} \\ \vdots \\ q_{nk} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn} \end{pmatrix}.
$$

$R^{-1}(k,\ldots,n)$ は正則だから

$$
\begin{pmatrix} q_{kk} \\ q_{k+1k} \\ \vdots \\ q_{nk} \end{pmatrix}
= [R^{-1}(k,\ldots,n)]^{-1}
\begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn} \end{pmatrix}.
$$

ゆえに

$$q_{ik} = \frac{1}{|R^{-1}(k,\ldots,n)|}\sum_{j=k}^{n} \tilde{r}_{ij}(k,\ldots,n) w_{kj},$$

ただし $\tilde{r}_{ij}(k,\ldots,n)$ は (i,j) における $R^{-1}(k,\ldots,n)$ の余因子行列である。したがって最小値は次のように表現される。

$$\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=k}^{n} r_{ij} \frac{\sum_{\ell=k}^{n} \tilde{r}_{i\ell}(k,\ldots,n) w_{k\ell}}{|R^{-1}(k,\ldots,n)|} \frac{\sum_{m=k}^{n} \tilde{r}_{jm}(k,\ldots,n) w_{km}}{|R^{-1}(k,\ldots,n)|} - 2\sum_{i=k}^{n} w_{ki} \frac{\sum_{\ell=k}^{n} \tilde{r}_{i\ell}(k,\ldots,n) w_{k\ell}}{|R^{-1}(k,\ldots,n)|}.$$

ここで次のことに注意する。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=k}^{n}\sum_{j=k}^{n}\sum_{\ell=k}^{n} r_{ij}\tilde{r}_{i\ell}(k,\ldots,n) w_{k\ell} \sum_{m=k}^{n} \tilde{r}_{jm}(k,\ldots,n) w_{km} \\
=\ & \sum_{j=k}^{n}\sum_{\ell=k}^{n}\sum_{i=k}^{n} r_{ij}\tilde{r}_{i\ell}(k,\ldots,n) w_{k\ell} \sum_{m=k}^{n} \tilde{r}_{jm}(k,\ldots,n) w_{km} \\
=\ & \sum_{j=k}^{n}\sum_{\ell=k}^{n} \delta_{j\ell} |R^{-1}(k,\ldots,n)| w_{k\ell} \sum_{m=k}^{n} \tilde{r}_{jm}(k,\ldots,n) w_{km} \\
=\ & \sum_{j=k}^{n} |R^{-1}(k,\ldots,n)| w_{kj} \sum_{m=k}^{n} \tilde{r}_{jm}(k,\ldots,n) w_{km}.
\end{aligned}
$$

したがって (4) の最小値は

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{|R^{-1}(k,\ldots,n)|}\sum_{i=k}^{n} w_{ki}\sum_{\ell=k}^{n}\tilde{r}_{i\ell}(k,\ldots,n)w_{k\ell} \\
= \; & -\langle [R^{-1}(k,\ldots,n)]^{-1}\begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn}\end{pmatrix}\rangle \qquad (5)
\end{aligned}
$$

である。 □

次に今度は任意の直交行列 W の下での (3) の最大値を評価したい。これに関しては次の定理を得る。

Theorem 3 任意の直交行列 W の下での *(3)* の最大値は次で与えられる。

$$
-Tr[R] + \sum_{k=2}^{n} \lambda_{\max}(\begin{pmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) \\ R_{21}(k) & R_{21}(k)R_{11}(k)^{-1}R_{12}(k)\end{pmatrix}),
$$

ただし $\lambda_{\max}(A)$ は A の最大固有値である。

Proof. $R_{22}(k)$ を $k,\ldots,n$ 行 $k,\ldots,n$ 列からなる R の部分行列、また $\mathrm{w}_k^* = \begin{pmatrix} w_{k1} & w_{k2} & \ldots & w_{kn}\end{pmatrix}^t$ とする。(3) より任意の直交行列 W の下で

$$
-\sum_{k=1}^{n}\langle [R^{-1}(k,\ldots,n)]^{-1}\begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn}\end{pmatrix}\rangle
$$

を最大にしなければならない。 $2 \le k \le n$ とする。

$$
[R^{-1}(k,\ldots,n)]^{-1} = R_{22}(k) - R_{21}(k)R_{11}(k)^{-1}R_{12}(k)
$$

より次を得る。

$$
\begin{aligned}
& -\langle [R^{-1}(k,\ldots,n)]^{-1}\begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn}\end{pmatrix}\rangle \\
= \; & -\langle R_{22}(k)\begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn}\end{pmatrix}\rangle + \langle R_{21}(k)R_{11}(k)^{-1}R_{12}(k)\begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn}\end{pmatrix}\rangle \\
= \; & -\langle \begin{pmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) \\ R_{21}(k) & R_{22}(k)\end{pmatrix}\mathrm{w}_k^*, \mathrm{w}_k^*\rangle + \langle \begin{pmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) \\ R_{21}(k) & R_{21}(k)R_{11}(k)^{-1}R_{12}(k)\end{pmatrix}\mathrm{w}_k^*, \mathrm{w}_k^*\rangle.
\end{aligned}
$$

したがって

$$-\sum_{k=1}^{n}\langle[R^{-1}(k,\ldots,n)]^{-1}\begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn} \end{pmatrix}\rangle$$

$$= -\langle R\mathrm{w}_1^*, \mathrm{w}_1^*\rangle - \sum_{k=2}^{n}\{\langle R\mathrm{w}_k^*, \mathrm{w}_k^*\rangle - \langle\begin{pmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) \\ R_{21}(k) & R_{21}(k)R_{11}(k)^{-1}R_{12}(k) \end{pmatrix}\mathrm{w}_k^*, \mathrm{w}_k^*\rangle\}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n}\langle R\mathrm{w}_k^*, \mathrm{w}_k^*\rangle + \sum_{k=2}^{n}\langle\begin{pmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) \\ R_{21}(k) & R_{21}(k)R_{11}(k)^{-1}R_{12}(k) \end{pmatrix}\mathrm{w}_k^*, \mathrm{w}_k^*\rangle$$

$$= -Tr[R] + \sum_{k=2}^{n}\langle\begin{pmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) \\ R_{21}(k) & R_{21}(k)R_{11}(k)^{-1}R_{12}(k) \end{pmatrix}\mathrm{w}_k^*, \mathrm{w}_k^*\rangle.$$

ここで $\lambda_{\max}(A) = \max\{\langle A\mathrm{x}, \mathrm{x}\rangle; \|\mathrm{x}\| = 1\}$ だから

$$\langle\begin{pmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) \\ R_{21}(k) & R_{21}(k)R_{11}(k)^{-1}R_{12}(k) \end{pmatrix}\mathrm{w}_k^*, \mathrm{w}_k^*\rangle \leq \lambda_{\max}(\begin{pmatrix} R_{11}(k) & R_{12}(k) \\ R_{21}(k) & R_{21}(k)R_{11}(k)^{-1}R_{12}(k) \end{pmatrix})$$

を得る。 □

次に W を 単位行列 I によって置き換えて得られる実2次形式

$$Tr[Q^t R^{-1} Q - 2Q] \tag{6}$$

を考える。ここで 任意の下三角行列 Q の下での (6) の最小値を求めたい。 Theorem 2 より次を得る。

Theorem 4 *(2)* の最小値は次で与えられる。

$$-|R_{11}(2)| - \frac{|R_{11}(3)|}{|R_{11}(2)|} - \frac{|R_{11}(4)|}{|R_{11}(3)|} - \cdots - \frac{|R|}{|R_{11}(n)|}.$$

Theorem 4 を証明するには次の補題が必要である。

Lemma 1 $2 \leq k \leq n$ に対して

$$|R^{-1}(k,\ldots,n)| = \frac{|R_{11}(k)|}{|R|}.$$

Proof.

$$R = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

とする。ただし A_{11} は $(k-1)\times(k-1)$ 行列、A_{12} は $(k-1)\times(n-k+1)$ 行列、A_{21} は $(n-k+1)\times(k-1)$ 行列、A_{22} は $(n-k+1)\times(n-k+1)$ 行列である。また

$$R^{-1}=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

を R の逆行列とする。ただし B_{11} は $(k-1)\times(k-1)$ 行列、B_{12} は $(k-1)\times(n-k+1)$ 行列、B_{21} は $(n-k+1)\times(k-1)$ 行列、B_{22} は $(n-k+1)\times(n-k+1)$ 行列である。R は正則だから A_{11} も正則である。

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}$$

より次を得る。

$$|R|=|A_{11}||A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}|. \tag{7}$$

一方

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=I$$

だから次の関係を得る。

$$A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} = 0 \tag{8}$$

$$A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} = I. \tag{9}$$

(8) より

$$B_{12}=-A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}. \tag{10}$$

したがって (9) と (10) より

$$-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}B_{22}+A_{22}B_{22}=I$$

即ち

$$(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})B_{22}=I.$$

を得る。したがって

$$|A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}||B_{22}|=1.$$

(7) より

$$\frac{|R|}{|A_{11}|}|B_{22}|=1.$$

ゆえに

$$|B_{22}|=\frac{|A_{11}|}{|R|}.$$

つまり

$$|R^{-1}(k,\ldots,n)|=\frac{|R_{11}(k)|}{|R|}.$$

□

Proof of Theorem 4. (5) において $w_{k\ell}=\delta_{k\ell},\ \ell=k,\ldots,n$ とおくと (6) の最小値は次で与えられる。

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{\tilde{r}_{kk}(k,\ldots,n)}{|R^{-1}(k,\ldots,n)|},$$

ただし $\tilde{r}_{kk}(k,\ldots,n)$ は (k,k) における $R^{-1}(k,\ldots,n)$ の余因子行列である。$\tilde{r}_{kk}(k,\ldots,n) = |R^{-1}(k+1,\ldots,n)|$ と Lemma 1 より (6) の最小値として

$$-\sum_{k=1}^{n} \frac{|R^{-1}(k+1,\ldots,n)|}{|R^{-1}(k,\ldots,n)|} = -|R_{11}(2)| - \frac{|R_{11}(3)|}{|R_{11}(2)|} - \cdots - \frac{|R|}{|R_{11}(n)|}$$

を得る。 □

3 $C_{n,FB}(P)$ の上界

$R_Z^{11}(k)$ を $1,\ldots,k-1$ 行 $1,\ldots,k-1$ 列からなる $R_Z^{(n)}$ の部分行列、$R_Z^{12}(k)$ を $1,\ldots,k-1$ 行、$k,\ldots,n$ 列からなる $R_Z^{(n)}$ の部分行列、$R_Z^{21}(k) = R_Z^{12}(k)^t$ とする。

Lemma 2 任意の正方行列 A, C に対して次が成り立つ。

$$Tr[AC^t] \le Tr[AA^t]^{1/2} Tr[CC^t]^{1/2}.$$

Proof. [2] を見よ。 □

Lemma 3 条件 *(1)* の下で

$$\frac{1}{n} Tr[R_V^{(n)} + BR_Z^{(n)}B^t + BR_Z^{(n)} + R_Z^{(n)}B^t]$$

の上界は次で与えられる。

$$P + 2\sqrt{\frac{P}{n}}\sqrt{Tr[R_Z^{(n)}] - |R_Z^{11}(2)| - \frac{|R_Z^{11}(3)|}{|R_Z^{11}(2)|} - \cdots - \frac{|R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{11}(n)|}}.$$

Proof. 煩雑さを避けるために $R_Z^{(n)}$ を R_Z と書くことにする。Lemma 2 において $A = BR_Z^{1/2}$, $C = R_Z^{1/2} - Q^t R_Z^{-1/2}$ とおく。ただし Q は下三角行列である。$Tr[BQ] = 0$ に注意すると次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
& Tr[BR_Z] \\
= \ & Tr[BR_Z] - Tr[BQ] \\
= \ & Tr[BR_Z^{1/2}(R_Z^{1/2} - R_Z^{-1/2}Q)] \\
= \ & Tr[BR_Z^{1/2}(R_Z^{1/2} - Q^t R_Z^{-1/2})^t] \\
\le \ & Tr[BR_Z B^t]^{1/2} Tr[(R_Z^{1/2} - Q^t R_Z^{-1/2})(R_Z^{1/2} - Q^t R_Z^{-1/2})^t]^{1/2} \\
= \ & Tr[BR_Z B^t]^{1/2} Tr[R_Z - Q - Q^t + Q^t R_Z^{-1} Q]^{1/2}.
\end{aligned}$$

$$Tr[BR_ZB^t] \le Tr[R_V + BR_ZB^t] \le nP.$$

は明らかである。Theorem 4 より次を得る。

$$\begin{aligned}
&\min_Q Tr[R_Z - Q - Q^t + Q^tR_Z^{-1}Q] \\
= \; & Tr[R_Z] + \min_Q Tr[Q^tR_Z^{-1}Q - 2Q] \\
= \; & Tr[R_Z] - |R_Z^{11}(2)| - \frac{|R_Z^{11}(3)|}{|R_Z^{11}(2)|} - \cdots - \frac{|R_Z|}{|R_Z^{11}(n)|}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}Tr[R_V + BR_ZB^t + BR_Z + R_ZB^t] \\
= \; & \frac{1}{n}Tr[R_V + BR_ZB^t] + \frac{2}{n}Tr[BR_Z] \\
\le \; & P + 2\sqrt{\frac{P}{n}}\sqrt{Tr[R_Z] - |R_Z^{11}(2)| - \frac{|R_Z^{11}(3)|}{|R_Z^{11}(2)|} - \cdots - \frac{|R_Z|}{|R_Z^{11}(n)|}}.
\end{aligned}$$

□

次に Dembo [2];Claim 3 の拡張である次の命題が成り立つ。

Proposition 2

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le \frac{1}{2}\log(P_2 + \frac{1}{n}Tr[R_Z^{(n)}]) - \frac{1}{2n}\log|R_Z^{(n)}|,$$

ただし

$$P_2 = P + 2\sqrt{\frac{P}{n}}\sqrt{Tr[R_Z^{(n)}] - |R_Z^{11}(2)| - \frac{|R_Z^{11}(3)|}{|R_Z^{11}(2)|} - \cdots - \frac{|R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{11}(n)|}}.$$

Proof. 煩雑さを避けるために $R_V^{(n)},\ldots$ を $R_V,\ldots$ などのように書くことにする。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2n}\log|R_V + BR_ZB^t + BR_Z + R_ZB^t + R_Z| - \frac{1}{2n}\log|R_Z| \\
\le \; & \frac{1}{2}\log\frac{1}{n}Tr[R_V + BR_ZB^t + BR_Z + R_ZB^t + R_Z] - \frac{1}{2n}\log|R_Z| \\
&(\,\frac{1}{2n}\log|A| \le \frac{1}{2}\log\frac{1}{n}Tr[A] \text{ だから}) \\
= \; & \frac{1}{2}\log\{\frac{1}{n}Tr[R_V + BR_ZB^t + BR_Z + R_ZB^t] + \frac{1}{n}Tr[R_Z]\} - \frac{1}{2n}\log|R_Z| \\
\le \; & \frac{1}{2}\log(P_2 + \frac{1}{n}Tr[R_Z]) - \frac{1}{2n}\log|R_Z|. \\
&(\text{ Lemma 3より})
\end{aligned}$$

したがって

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le \frac{1}{2}\log(P_2 + \frac{1}{n}Tr[R_Z]) - \frac{1}{2n}\log|R_Z|.$$

□

$R_U^{(n)} = R_V^{(n)} + BR_Z^{(n)}B^t + BR_Z^{(n)} + R_Z^{(n)}B^t$ とおくと、$R_U^{(n)}$ は対称ではあるが正定値ではない。そこで $\langle R_U^{(n)}\rangle = ((R_U^{(n)})^t R_U^{(n)})^{1/2}$ とする。このとき

$$R_U^{(n)} = \frac{\langle R_U^{(n)}\rangle + R_U^{(n)}}{2} - \frac{\langle R_U^{(n)}\rangle - R_U^{(n)}}{2}.$$

$\langle R_U^{(n)}\rangle + R_U^{(n)}$ と $\langle R_U^{(n)}\rangle - R_U^{(n)}$ は正定値であるので、

$$R_Z^{(n)} + R_U^{(n)} \le R_Z^{(n)} + \frac{\langle R_U^{(n)}\rangle + R_U^{(n)}}{2}.$$

したがって

$$|R_Z^{(n)} + R_U^{(n)}| \le |R_Z^{(n)} + \frac{\langle R_U^{(n)}\rangle + R_U^{(n)}}{2}|.$$

(1) の条件の下で $\frac{1}{n}Tr[\frac{\langle R_U^{(n)}\rangle + R_U^{(n)}}{2}]$ の上界を求めたい。Lemma 3 より $\frac{1}{n}Tr[R_U^{(n)}]$ の上界は P_2 で与えられる。したがって (1) の条件の下で $\frac{1}{n}Tr[\langle R_U^{(n)}\rangle]$ の上界を求めなければならない。

Lemma 4 *(1)* の条件の下で

$$\frac{1}{n}Tr[\langle R_U^{(n)}\rangle]$$

の上界は次で与えられる。

$$P + 2\sqrt{\frac{P}{n}}\sqrt{\sum_{k=2}^{n}\lambda_{\max}(\begin{pmatrix} R_Z^{11}(k) & R_Z^{12}(k) \\ R_Z^{21}(k) & R_Z^{21}(k)R_Z^{11}(k)^{-1}R_Z^{12}(k)\end{pmatrix})}.$$

Proof. 煩雑さを避けるために $R_Z^{(n)},\ldots$ を $R_Z,\ldots$ のように書くことにする。Schatten [9], p4, より

$$\langle R_U\rangle = W^tR_U = W^tR_V + W^tBR_ZB^t + W^tBR_Z + W^tR_ZB^t$$

を満たす直交行列 W が存在する。

$$Tr[W^t(R_V + BR_ZB^t)] \le ||W^t||Tr[R_V + BR_ZB^t] \le nP$$

は明らかである。Lemma 2 で $A = BR_Z^{1/2}$, $C = WR_Z^{1/2} - Q^tR_Z^{-1/2}$ とおく。ただし Q は下三角行列である。$Tr[BQ] = 0$ だから次の式を得る。

$$\begin{aligned}
& Tr[W^tBR_Z] \\
= \ & Tr[BR_ZW^t] \\
= \ & Tr[BR_ZW^t] - Tr[BQ] \\
= \ & Tr[BR_Z^{1/2}(R_Z^{1/2}W^t - R_Z^{-1/2}Q)] \\
= \ & Tr[BR_Z^{1/2}(WR_Z^{1/2} - Q^tR_Z^{-1/2})^t] \\
\le \ & Tr[BR_ZB^t]^{1/2}Tr[(WR_Z^{1/2} - Q^tR_Z^{-1/2})(WR_Z^{1/2} - Q^tR_Z^{-1/2})^t]^{1/2} \\
= \ & Tr[BR_ZB^t]^{1/2}Tr[WR_ZW^t - WQ - Q^tW^t + Q^tR_Z^{-1}Q]^{1/2}.
\end{aligned}$$

ここで

$$\min_Q Tr[WR_ZW^t - WQ - Q^tW^t + Q^tR_Z^{-1}Q] = Tr[R_Z] + \min_Q Tr[Q^tR_Z^{-1}Q - 2WQ]$$

だから Theorem 2 より次を得る。

$$\min_Q Tr[Q^tR_Z^{-1}Q - 2WQ] = -\sum_{k=1}^{n}\langle [R_Z^{-1}(k,\ldots,n)]^{-1}\begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_{kk} \\ w_{kk+1} \\ \vdots \\ w_{kn}\end{pmatrix}\rangle. \tag{11}$$

Theorem 3 より任意の直交行列 W の下での (11) の上界は次で与えられる。

$$-Tr[R_Z] + \sum_{k=2}^{n}\lambda_{\max}(\begin{pmatrix} R_Z^{11}(k) & R_Z^{12}(k) \\ R_Z^{21}(k) & R_Z^{21}(k)R_Z^{11}(k)^{-1}R_Z^{12}(k)\end{pmatrix}).$$

ゆえに (1) の条件の下で $\frac{1}{n}Tr[W^tBR_Z]$ の上界は次で与えられる。

$$\sqrt{\frac{P}{n}}\sqrt{\sum_{k=2}^{n}\lambda_{\max}(\begin{pmatrix} R_Z^{11}(k) & R_Z^{12}(k) \\ R_Z^{21}(k) & R_Z^{21}(k)R_Z^{11}(k)^{-1}R_Z^{12}(k)\end{pmatrix})}. \tag{12}$$

同様に (1) の条件の下で

$$\frac{1}{n}Tr[W^tR_ZB^t]$$

の上界も (12) で与えられる。 したがって結果を得る。 □

ようやく主定理を述べることができる。

Theorem 5

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le C_n(P^*),$$

ただし

$$P^* = P + \sqrt{\frac{P}{n}}\{\sqrt{\sum_{k=2}^{n}\lambda_{\max}(\begin{pmatrix} R_Z^{11}(k) & R_Z^{12}(k) \\ R_Z^{21}(k) & R_Z^{21}(k)R_Z^{11}(k)^{-1}R_Z^{12}(k)\end{pmatrix})}$$
$$+\sqrt{Tr[R_Z^{(n)}] - |R_Z^{11}(2)| - \frac{|R_Z^{11}(3)|}{|R_Z^{11}(2)|} - \cdots - \frac{|R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{11}(n)|}}\}.$$

次の系は容易に得られる。

Corollary 1

$$C_n(P) \le C_{n,FB}(P) \le C_n(P_3),$$

ただし

$$
\begin{aligned}
P_3 &= P + \sqrt{\frac{P}{n}}\{\sqrt{Tr[R_Z^{(n)}]} \\
&\quad + \sqrt{Tr[R_Z^{(n)}] - |R_Z^{11}(2)| - \frac{|R_Z^{11}(3)|}{|R_Z^{11}(2)|} - \cdots - \frac{|R_Z^{(n)}|}{|R_Z^{11}(n)|}}\}.
\end{aligned}
$$

Proof. 煩雑さを避けるために $R_Z^{(n)}$ を R_Z と書くことにする。Lemma 2 で $A = BR_Z^{1/2}$, $C = WR_Z^{1/2}$ とおくと次を得る。

$$
\begin{aligned}
& Tr[W^t B R_Z] \\
=\ & Tr[B R_Z W^t] \\
\leq\ & Tr[B R_Z B^t]^{1/2} Tr[W R_Z W^t]^{1/2} \\
\leq\ & \sqrt{nP}\, Tr[R_Z]^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Lemma 4 と同じ方法で結果を得る。 □

参考文献

[1] T. Cover and S. Pombra, "Gaussian feedback capacity", IEEE Trans. Information Theory, Vol IT-35, pp 37-43, January 1989.

[2] A. Dembo, "On Gaussian feedback capacity", IEEE Trans. Information Theory, Vol IT-35, pp 1072-1089, September 1989.

[3] P. Ebert, "The capacity of the Gaussian channel with feedback", Bell. Syst. Tech. J., pp 1705-1712, 1970.

[4] R. G. Gallager, Information theory and reliable communication, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[5] S. Ihara, "On the capacity of the discrete time Gaussian channel with feedback", Trans. Eighth Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions, Random Processes, Vol C, Czecho. Acad. Sci., pp 175-186, 1978.

[6] S. Ihara and K.Yanagi, "Capacity of discrete time Gaussian channel with and without feedback, II", Japan J. Appl. Math., Vol 6, pp 245-258, 1989.

[7] L. Ozarow, "Upper bounds on the capacity of Gaussian channels with feedback", IEEE Trans. Information Theory, Vol IT-36, pp 156-161, January 1990.

[8] M. Pinsker, talk delivered at the Soviet Information Theory Meeting, (no abstract published), 1969.

[9] R. Schatten, Norm ideals of completely continuous operators, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1960.

[10] K. Yanagi, "An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback", Lecture Notes in Math., Vol 1299, pp 565-570, 1988.

[11] K. Yanagi, "Necessary and sufficient condition for capacity of the discrete time Gaussian channel to be increased by feedback", IEEE Trans. Information Theory, Vol IT-38, pp 1788-1791, Nobember 1992.

[12] K. Yanagi, "An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback, II", IEEE Trans. Information Theory, to appear.

755 山口県宇部市常盤台２５５７
山口大学工学部共通講座
0836-31-5100 (Ext 4911)
0836-35-9966 (Direct)
yanagi@ccti.cct.yamaguchi-u.ac.jp (e-mail)
yanagi@hakucho.apsci.yamaguchi-u.ac.jp (e-mail)